Gegeben ist die Funktion mit der Funktionsgleichung

$f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$

Führen Sie eine komplette Kurvendiskussion durch. (Lm)

Einleitung: Die Funktion f ist als ganzrationale Funktion 4-ten Grades auf ihrem Definitionsbereich D = ℝ stetig und beliebig oft differenzierbar. Ihre ersten beiden Ableitungen lauten:

$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5$

$f''(x) = 12x^2 + 6x - 6$

Nullstellen: Die Funktion f hat an der Stelle a eine Nullstelle, genau dann wenn

$f(a) = 0$

$\Leftrightarrow a^4 + a^3 - 3a^2 - 5a - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (a + 1)(a^3 - 3a - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (a + 1)^2(a^2 - a - 2) = 0$

Vieta

$\Leftrightarrow (a + 1)^3(a - 2) = 0$

$\Leftrightarrow a = -1 \lor a = 2$

Hornerschema:
erraten a = -1 (in beiden Schritten)

```
 1   1   -3   -5   -2
 0  -1    0    3    2
--------------------
 1   0   -3   -2    0
 0  -1    1    2
---------------
 1  -1   -2    0
```

Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse bei im Punkt $N_1=(-1/0)$ (dreifach zählend) und im Punkt $N_2 =(2/0)$ (einfach zählend).

Symmetrie: Der Graph der Funktion f verläuft symmetrisch zum Ursprung (zur f(x)-Achse), genau dann wenn

$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} -f(-x) = f(x) \qquad (f(-x) = f(x))$

$f(-x) = (-x)^4 + (-x)^3 - 3(-x)^2 - 5(-x) - 2$

$= x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$

$\neq f(x)$

$-f(-x) = -(x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2)$

$= -x^4 + x^3 + 3x^2 - 5x + 2$

$\neq f(x)$

Somit kann keine der genannten Symmetriearten vorliegen.

(Bem.: **Statt** des Nachweises kann auch m.H. der Nullstellen argumentiert werden:
Da die Nullstellen nicht symmetrisch zum Ursprung liegen, kann keine der genannten Symmetriearten vorliegen.)

Verhalten an den Definitionsbereichsgrenzen:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2) =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[x^4 \cdot \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3} - \frac{2}{x^4}\right)\right] = +\infty \cdot (1 + 0 - 0 - 0 - 0) = +\infty$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots = +\infty*(1-0-0+0-0) = +\infty$

Lokale Extrema und Monotonieverhalten:

Hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums an der Stelle a ist:
$f'(a) = 0$ und f' hat an der Stelle a einen Vorzeichenwechsel.
Ist dieser von "+ nach -" ("- nach +"), dann ist der Punkt (a/f(a)) lokaler Hochpunkt (lokaler Tiefpunkt).
Das Monotonieverhalten ändert sich an den Extrema. Gilt

$\bigwedge_{x\in]a;b[}$ $f'(x) < 0$ (>0), dann ist die Funktion f auf dem Intervall]a;b[monoton fallend (monoton steigend).

$f'(a) = 0$
$\Leftrightarrow 4a^3 + 3a^2 - 6a - 5 = 0$
$\Leftrightarrow (a + 1)(4a^2 - a - 5) = 0$
$\Leftrightarrow 4(a + 1)(a^2 - 0{,}25a - 1{,}25) = 0$
Vieta
$\Leftrightarrow 4(a + 1)((a + 1)(a - 1{,}25) = 0$
$\Leftrightarrow a = -1 \;\vee\; a = 1{,}25$

a=-1 Hornerschema

4	3	-6	-5
0	-4	1	5
4	-1	-5	0

x∈]a;b[	4	$(x+1)^2$	x-1,25	f´(x)	f ist über dem Intervall]a;b[
]<-;-1[	+	+	–	–	monoton fallend
]-1;1,25[	+	+	–	–	monoton fallend
]1,25;->[	+	+	+	+	monoton steigend

VZW von „– nach +“ <– **TP**

f besitzt den globalen ("da beide Grenzwerte $+\infty$ sind") Tiefpunkt **TP(1,25/f(1,25))**. $f(1{,}25) \approx -8{,}543$

Wendepunkte und Krümmungsverhalten:

Hinreichende Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes an der Stelle a ist:
$f''(a) = 0$ und f'' hat an der Stelle a einen Vorzeichenwechsel.
Das Krümmungsverhalten ändert sich an den Wendestellen. Gilt

$\bigwedge_{x\in]a;b[}$ $f''(x) < 0$ (>0), dann ist die Funktion f auf dem Intervall]a;b[rechtsgekrümmt (linksgekrümmt).

$f''(a) = 0$
$\Leftrightarrow 12a^2 + 6a - 6 = 0$
$\Leftrightarrow a^2 + 0{,}5a - 0{,}5 = 0$ (Vieta)
$\Leftrightarrow (a + 1)(a - 0{,}5) = 0$
$\Leftrightarrow a = -1 \;\vee\; a = 0{,}5$

x∈]a;b[	12	x+1	x-0,5	f´´(x)	f ist über dem Intervall]a;b[
]<-;-1[	+	–	–	+	linksgekrümmt
]-1;0,5[	+	+	–	–	rechtsgekrümmt
]0,5;->[	+	+	+	+	linksgekrümmt

WP
WP

f(0,5) = -5,0625   f(-1) = 0
f besitzt die Wendepunkte
WP1(0,5/-5,0625) und **WP2(-1/0)**.
WP2 ist sogar ein **Sattelpunkt** (da auch f´(-1)=0 ist).

Wendetangente:

Punkt WP(0,5/-5,0625) Steigung: $f'(0,5)=4\cdot 0,5^3+3\cdot 0,5^2-6\cdot 0,5-5=-6,75$
t(x)= mx + b
$-5,0625 = -6,75\cdot 0,5 + b$
<=> b = -1,6875
Somit:
t(x) = -6,75x - 1,6875
Tangente im Sattelpunkt (-1/0) **t(x) = 0**

Wertebereich:

Der Definitionsbereich D=ℝ ist zusammenhängend. Das stetige Bild zusammenhängender Mengen ist zusammenhängend. Wegen
$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
sowie des globalen Tiefpunktes TP(1,25/f(1,25)) gilt
W = [f(1,25)/->[≈ [-8,543;->[

Wertetabelle:

x	-2	-1	0	0,5	1	1,25	2	3
f(x)	-4	0	-2	-5,06…	-8	-8,54…	0	64
besonderer Punkt	----	NS;SP	----	WP	----	TP	NS	----