Aufgabe: (Lm)

Gegeben ist die Funktion mit der Funktionsgleichung

f(x) = x^5 – $6x^4$ + $9x^3$

Führen Sie eine komplette Kurvendiskussion durch.

Einleitung: Die Funktion f ist als ganzrationale Funktion 5-ten Grades auf ihrem Definitionsbereich D = R stetig und beliebig oft differenzierbar. Ihre ersten drei Ableitungen lauten:

$$f'(x) = 5x^4 - 24x^3 + 27x^2$$

$$f''(x) = 20x^3 - 72x^2 + 54x$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 144x + 54$$

Nullstellen: f besitzt an der Stelle a eine Nullstelle, genau dann wenn

$$f(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^5 - 6a^4 + 9a^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 \cdot (a^2 - 6a + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 \cdot (a-3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = 3$$

Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse im Ursprung (dreifach zählend) und er berührt die x-Achse im Punkt (3/0) (doppelt zählende Nullstellen).

Symmetrie: Der Graph der Funktion f verläuft symmetrisch zum Ursprung (zur f(x)-Achse), genau dann wenn

$$\bigwedge_{x \in R} \mathbf{-f(-x) = f(x)} \qquad \mathbf{(f(-x) = f(x))}$$

$$\begin{aligned} -f(-x) &= -\left[(-x)^5 - 6(-x)^4 + 9(-x)^3\right] \\ &= -\left[-x^5 - 6x^4 - 9x^3\right] \\ &= -\left[-x^5 - 6x^4 - 9x^3\right] \\ &= x^5 + 6x^4 + 9x^3 \\ &\neq f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 - 6(-x)^4 + 9(-x)^3 \\ &= -x^5 - 6x^4 - 9x^3 \\ &\neq f(x) \end{aligned}$$

Somit liegt keine der genannten Symmetriearten vor.

Verhalten an den Definitionsbereichsgrenzen:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^5 - 6x^4 + 9x^3) = \lim_{x \to -\infty} \left[\underbrace{x^5}_{-\infty} \cdot \left(\underbrace{1}_{1} - \underbrace{\frac{6}{x}}_{0} + \underbrace{\frac{9}{x^2}}_{0} \right) \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left[\underbrace{x^5}_{+\infty} \cdot \left(\underbrace{1}_{1} - \underbrace{\frac{6}{x}}_{0} + \underbrace{\frac{9}{x^2}}_{0} \right) \right] = \infty$$

Lokale Extrema und Monotonieverhalten:

Gilt:

f´(a) = 0 und f´´(a)<0 (>0) ,

dann ist der Punkt (a/f(a)) lokaler Hochpunkt (lokaler Tiefpunkt) des Graphen der Funktion f.

Das Monotonieverhalten ändert sich an den Extrema. Gilt

$\bigwedge\limits_{x\in]a;b[}$ f´(x) < 0 (>0), dann ist der Graph der Funktion f auf dem Intervall]a;b[monoton fallend (monoton steigend).

$$f'(a) = 0$$
$$\Leftrightarrow 5a^4 - 24a^3 + 27a^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 5a^2 \cdot \left(a^2 - \frac{24}{5}a + \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \frac{27}{5} - \frac{144}{25}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow 5a^2 \cdot \left[\left(a - \frac{12}{5}\right)^2 - \frac{9}{25}\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow 5a^2 \cdot \left(a - \frac{12}{5} - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(a - \frac{12}{5} + \frac{3}{5}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow 5a^2 \cdot (a-3) \cdot \left(a - \frac{9}{5}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = 3 \vee a = \frac{9}{5}$$

$$f''(0) = 0$$
$$f''(3) = 20 \cdot 3^3 - 72 \cdot 3^2 + 54 \cdot 3 = 540 - 648 + 162 = 54 > 0$$
$$f''(1{,}8) = 20 \cdot 1{,}8^3 - 72 \cdot 1{,}8^2 + 54 \cdot 1{,}8 = -19{,}44 < 0$$

$f(3) = 3^5 - 6 \cdot 3^4 + 9 \cdot 3^3 = 0$ **(3 ist (auch) Nullstelle)**

$$f(1{,}8) = 1{,}8^5 - 6 \cdot 1{,}8^4 + 9 \cdot 1{,}8^3 \approx 8{,}4$$

f besitzt an der Stelle 0 kein Extrempunkt, da **f´ an der Stelle 0** keinen Vorzeichenwechsel hat.

f besitzt den lokalen Hochpunkt **HP(1,8/f(1,8))** und

den lokalen Tiefpunkt **TP(–3/0).**

f ist auf dem Intervall

$1 \in \left]\leftarrow;1{,}8\right[$ ***monoton steigend*** ***Kontrollwert***: $f'(1) = 5 - 24 + 27 = 8 > 0$

$\left]1{,}8\,;\,3\right[$ ***monoton fallend***

$\left]3\,;\rightarrow\right[$ ***monotonsteigend .***

Wendepunkte und Krümmungsverhalten:

Hinreichende Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes an der Stelle a ist:

$f''(a) = 0 \wedge f'''(a) \neq 0$**, dann ist der Punkt (a/f(a))**

Wendepunkte des Graphen der Funktion f.

Das Krümmungsverhalten ändert sich an den Wendestellen.

Gilt $\bigwedge\limits_{x\in]a;b[}$**f´´(x) <0 (>0),** dann ist der Graph der Funktion f auf dem Intervall]a;b[rechtsgekrümmt (linksgekrümmt).

$$f''(a) = 0$$
$$\Leftrightarrow 20a \cdot \left(a^2 - \frac{18}{5}a + \left(\frac{9}{5}\right)^2 + \frac{27}{10} - \frac{81}{25} \right) = 0$$
$$\Leftrightarrow 20a \cdot \left[\left(a - \frac{9}{5} \right)^2 + \frac{135}{50} - \frac{162}{50} \right] = 0$$
$$\Leftrightarrow 20a \cdot \left(a - \frac{9}{5} + \sqrt{\frac{27}{50}} \right) \cdot \left(a - \frac{9}{5} - \sqrt{\frac{27}{50}} \right) = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = \frac{9}{5} - \sqrt{\frac{27}{50}} \vee a = \frac{9}{5} + \sqrt{\frac{27}{50}}$$
$$a = 0 \vee a \approx 1{,}07 \vee a \approx 2{,}53$$

$$f'''(0) = 54 \neq 0$$
$$f'''\left(\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{27}{50}} \right) \approx 74{,}5 \neq 0$$
$$f'''\left(\frac{9}{5} - \sqrt{\frac{27}{50}} \right) \approx -31{,}3 \neq 0$$
$$f(0) = 0$$
$$f\left(\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{27}{50}} \right) \approx 3{,}52$$
$$f\left(\frac{9}{5} - \sqrt{\frac{27}{50}} \right) \approx 4{,}52$$

f besitzt die Wendepunkte $WP_1\left(\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{27}{50}} ; f\left(\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{27}{50}} \right) \right), WP_2\left(\frac{9}{5} - \sqrt{\frac{27}{50}} ; f\left(\frac{9}{5} - \sqrt{\frac{27}{50}} \right) \right)$

und den Sattelpunkt
(auch $f'(0) = 0$) **SP(0 ; 0).**
Der Graph der Funktion f ist auf dem Intervall

$\left] \leftarrow ; 0 \right[$ *rechtsgekrümmt*

$1 \in \left] 0 ; \frac{9}{5} - \sqrt{\frac{27}{50}} \right[$ *linksgekrümmt* ***Kontrollwert*:**

$\left] \frac{9}{5} - \sqrt{\frac{27}{50}} ; \frac{9}{5} + \sqrt{\frac{27}{50}} \right[$ *rechtsgekrümmt* $f''(1) = 20 - 72 + 54 = 2 > 0$

$\left] \frac{9}{5} + \sqrt{\frac{27}{50}} ; \rightarrow \right[$ *linksgekrümmt*

Wertetabelle und graphische Darstellung:

x	f(x)	besonderer Punkt
-1	**-16**	
0	**0**	**Nullstelle Sattelpunkt**
1	**4**	
$\frac{9}{5} - \sqrt{\frac{27}{50}} \approx 1{,}07$	**≈4,52**	**Wendepunkt**
1,8	**≈8,4**	**Hochpunkt**
2	**8**	
$\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{27}{50}} \approx 2{,}53$	**≈3,52**	**Wendepunkt**
3	**0**	**Nullstelle u. Tiefpunkt**
4	**64**